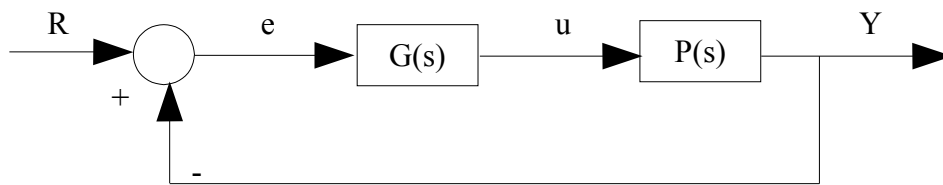


CONTROLLORE PID

Mostriamo le caratteristiche del controllore ad azione Proporzionale (P), Integrale (I) e Derivativa (D) e come usarlo per ottenere la risposta desiderata. Consideriamo il caso di un sistema oggetto da controllare $P(s)$ e di un blocco di eccitazione del sistema che serve per il suo controllo $G(s)$ in cascata. Ovviamente, per poter avere un controllo completo il controllore deve sapere le eventuali variazioni dell'uscita e pertanto, tutto il sistema viene retroazionato con retroazione unitaria, secondo il seguente grafico:



La funzione di trasferimento di un controllore PID si presenta in generale sotto la seguente forma:

$$K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{(K_D s^2 + K_p s + K_I)}{s}.$$

La variabile e rappresenta l'errore tra l'uscita desiderata R e l'uscita effettiva del sistema Y ; questo segnale è, a sua volta, l'ingresso del controllore PID, il quale calcola sia la sua derivata sia il suo integrale. Il segnale u all'uscita del controllore è dato dalla somma dei tre termini: Proporzionale, dato dal prodotto dell'errore con il guadagno K_p ; Integrale, prodotto del corrispondente guadagno K_I con l'integrale di e ; Derivativo, dato da K_D per la derivata di e :

$$u = K_p e + K_I \int e dt + K_D \frac{de}{dt}.$$

Il segnale u viene inviato al sistema da controllare e , quindi, si ottiene una nuova uscita Y . Essa viene nuovamente confrontata con l'ingresso R ed all'errore nuovo che ne deriva viene applicato il controllore PID ed il processo continua indefinitamente.

Vediamo, adesso, le caratteristiche dei controllori P, I e D.

Un controllore proporzionale avrà l'effetto di:

1. ridurre il tempo di salita (parametro che caratterizza la prontezza della risposta);
2. ridurre, ma non eliminare l'errore a regime permanente .

Una azione integratrice ha l'effetto di:

1. eliminare l'errore a regime permanente;
2. peggiorare la risposta transitoria; noie con la stabilità.

Un controllore derivativo, invece, ha l'effetto di aumentare la stabilità del sistema, migliorando la risposta transitoria. Questo tipo di controllore non è fisicamente realizzabile e viene abbinato con un controllore proporzionale ed integratore.

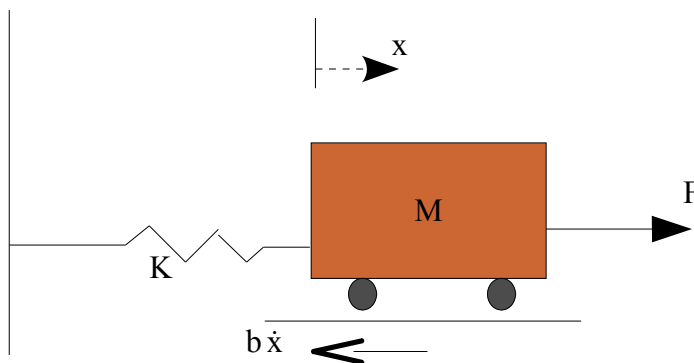
Riepiloghiamo con la tabella seguente:

Controllore	Tempo di salita	Sovraelongazioni	Transitori	Errore a regime
K_P	Diminuisce	Aumentano	Non influisce	Diminuisce
K_I	Diminuisce	Aumentano	Aumenta	Eliminato
K_D	Non influisce	Diminuiscono	Diminuisce	Non influisce

Da ricordare che i tre controllori agiscono insieme e non indipendentemente l'uno dall'altro.

ESEMPIO:

Consideriamo un sistema composto da una massa su cui agiscono: una forza F , una molla con costante elastica K e l'attrito con coefficiente b .



Il modello di questo sistema è

$$M \ddot{x} + b \dot{x} + K x = F \quad (1)$$

Eseguiamo le trasformate di Laplace del modello (1) ed otteniamo:

$$M s^2 X(s) + b s X(s) + K X(s) = F(s)$$

La f.d.T. $X(s)/F(s)$ che corrisponde a $P(s)$ è

$$P(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + K}$$

Supponendo di avere i seguenti valori costanti: $M = 1 \text{ Kg}$, $b = 10 \text{ N sec/m}$, $K = 20 \text{ N/m}$ e sostituendo si ottiene:

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 10s + 20}$$

Vogliamo mostrare come ciascun controllore influisce sul sistema oggetto per ottenere un rapido tempo di salita, una minima sopraelongazione e un errore nullo in regime permanente.

In Scilab si utilizza la funzione *csim* che simula la risposta nel tempo di un sistema lineare. Nel nostro caso, abbiamo:

```
-->s=poly(0,'s');
```

```
-->t=0:0.01:2;
```

```
-->P=1/(s^2+10*s+20)
```

P =

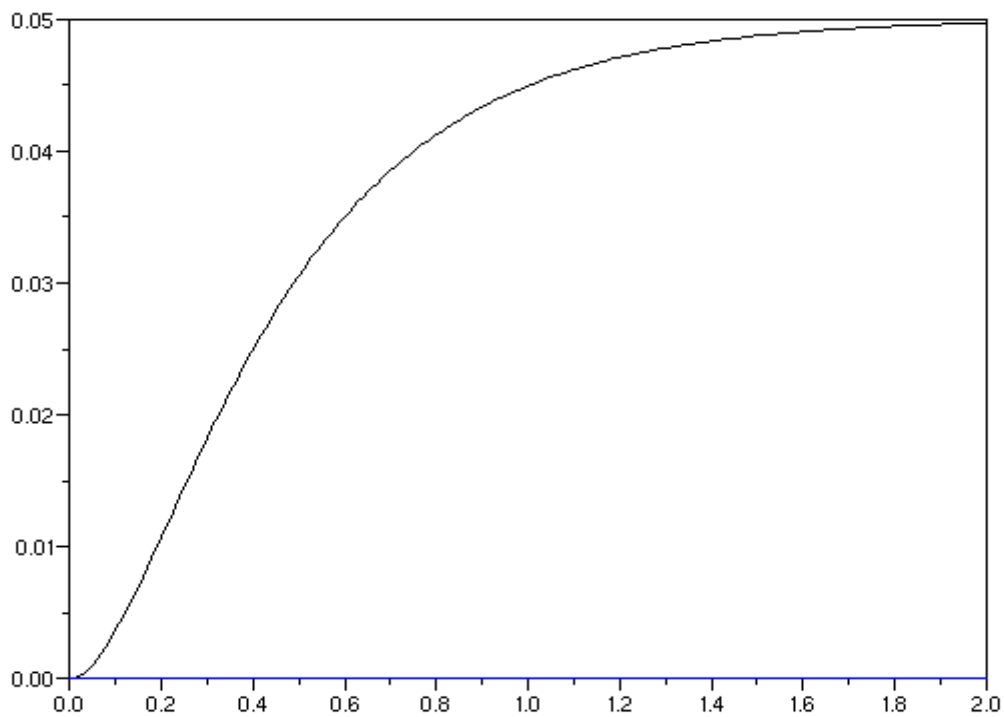
1

20 + 10s + s²

```
-->sl=tf2ss(P);
```

```
-->plot2d([t],[csim('step',t,sl)])
```

Il guadagno della f.d.T. a ciclo aperto è $1/20$, e 0.05 è il valore dell'uscita del sistema alimentato da un gradino unitario (step) e quindi deve essere pari ad 1. Questo corrisponde ad un elevato errore a regime permanente pari a $1 - 0.05 = 0.95$. Inoltre, il tempo di salita, che è il tempo che intercorre tra il 10% e il 90% del massimo valore della curva, è di circa 1 secondo, ed il transitorio è di circa 1.5 secondi. Costruiamoci un controllore che riduca il tempo di salita ed il transitorio, ed elimini l'errore a regime.



Per prima cosa inseriamo il sistema in una retroazione unitaria, calcoliamo la f.d.T. del sistema retroazionato, e ripercorriamo gli stessi passi precedenti:

```
-->R=1;
```

```
-->P1=P/.R //Calcolo della f.d.T. del sistema retroazionato.
```

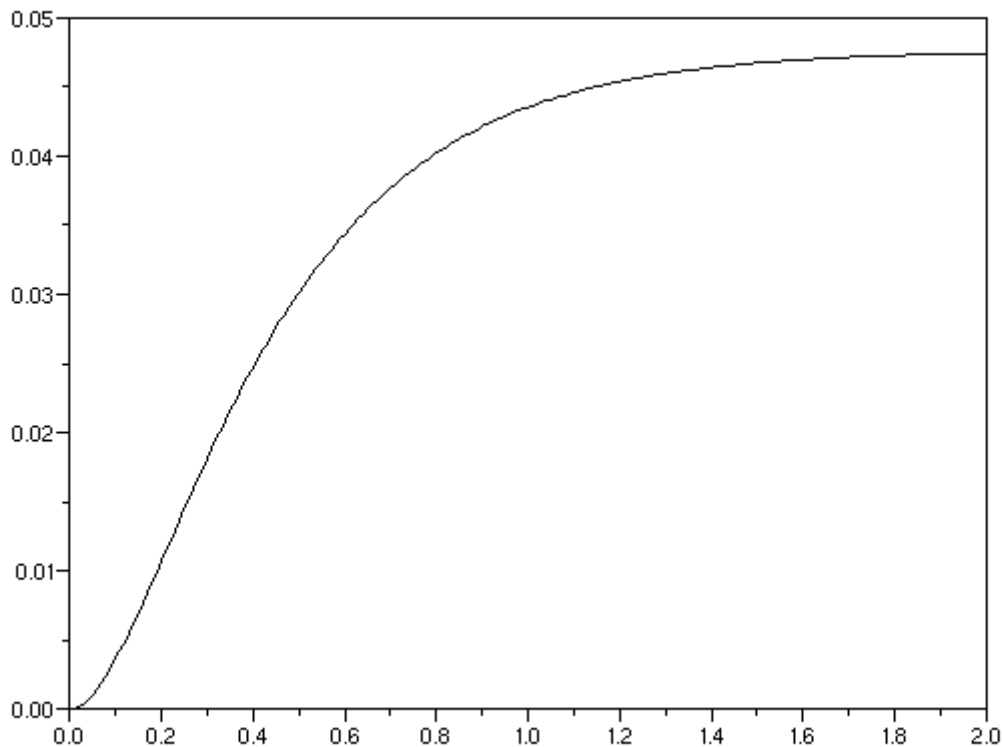
P1 =

1

$21 + 10s + s^2$

```
-->s11=tf2ss(P1);
```

```
-->plot2d([t],[csim('step',t,s11)])
```



Come si vede non è cambiato nulla per quanto riguarda il tempo di salita e il transitorio, ed in più è aumentato anche l'errore a regime.

Controllore proporzionale

Dalla tabella precedente si vede che l'inserimento di un controllore proporzionale riduce il tempo di salita e riduce l'errore a regime, ma incrementa le sovralongazioni e quindi le oscillazioni che in questo caso in partenza non c'erano.

La nuova funzione di trasferimento a ciclo chiuso con il controllore $G(s) = K_p$ è la seguente:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{K_p}{s^2 + 10s + (20 + K_p)}$$

In Scilab imponiamo, per esempio, $K_p = 300$ ed otteniamo:

-->P2=Kp*P;

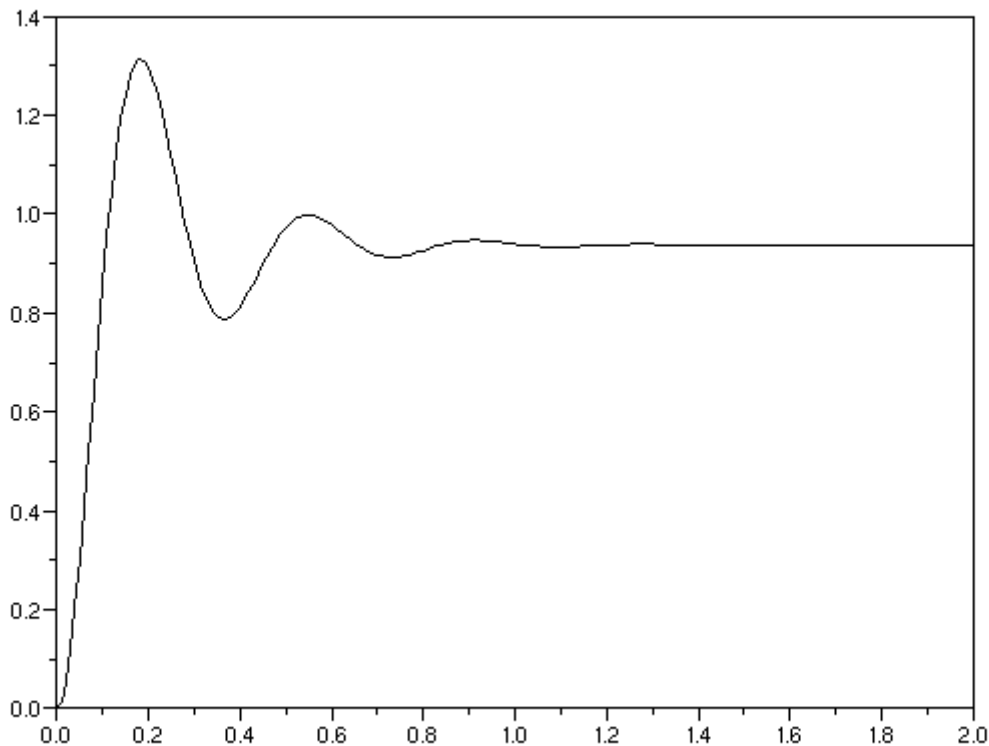
-->P2R=P2/.R

P2R =

$$\frac{300}{320 + 10s + s^2}$$

```
-->sl2=tf2ss(P2R);
```

```
-->plot2d([t],[csim('step',t,sl2)])
```



Come si può notare, il controllore proporzionale riduce sia il tempo di salita che l'errore a regime permanente, aumenta le oscillazioni e decresce leggermente il transitorio.

Controllore proporzionale e derivativo

Dalla stessa tabella di prima vediamo che il controllore derivativo riduce le sovraelongazioni ed il transitorio. La f.d.T. del sistema a ciclo chiuso con il controllore PD è:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{K_p + K_D s}{s^2 + (10 + K_D)s + (20 + K_p)}$$

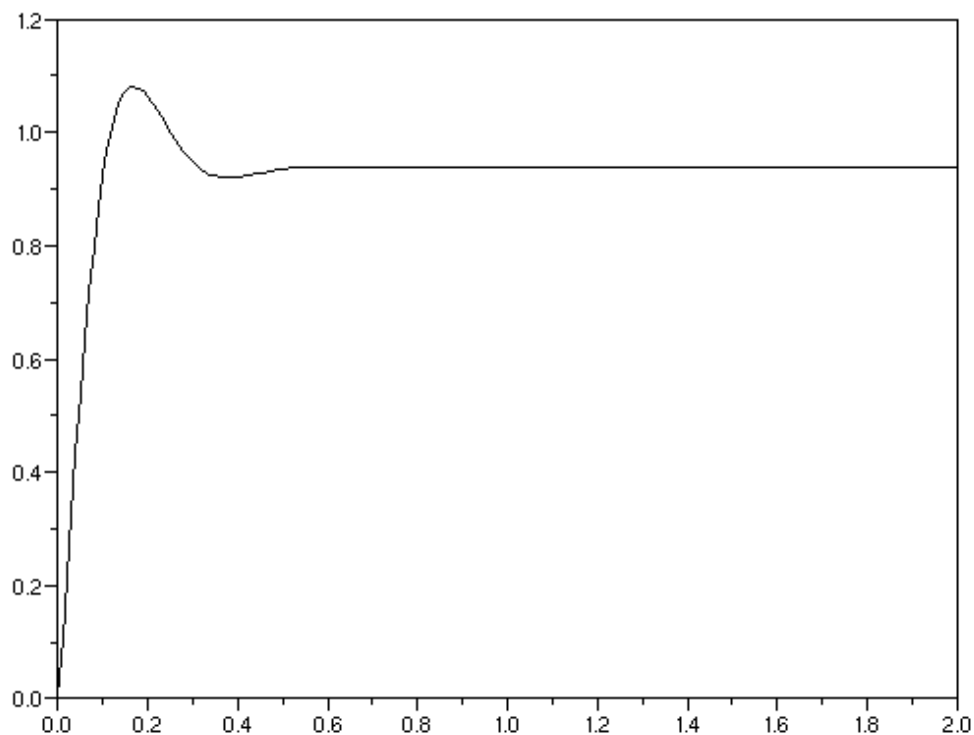
Imponiamo, in Scilab, $K_p = 300$ e $K_D = 10$ ed otteniamo con gli stessi passi precedenti:

```

-->s=poly(0,'s');
-->t=0:0.01:2;
-->P=1/(s^2+10*s+20);
-->R=1;//Retroazione unitaria
-->Kd=10;
-->Kp=300;
-->P3=(Kp+Kd*s);
-->P4=P3*P;
-->P4R=P4/.R

P4R =
  300 + 10s
  -----
  320 + 20s + s^2
-->sl4=tf2ss(P4R);
-->plot2d([t],[(csim('step',t,sl4))])
-->//numer e denom prelevano il numeratore ed il denominatore di una f.d.T.
-->N=numer(P4R);
-->D=denom(P4R);
-->ss=syslin('c',N,D);
-->plot2d([t],[(csim('step',t,ss))])

```



Il grafico mostra, come previsto, che l'azione derivativa diminuisce sia la sovralongazione sia il transitorio, ma influisce poco sull'errore a regime permanente e sul tempo di salita.

Controllore proporzionale ed integrale

Adesso, prendiamo in considerazione un controllore PI. Ci aspettiamo che il controllore integrale diminuisca il tempo di salita, incrementi sia la sovralongazione sia il transitorio ed elimini l'errore a regime permanente. Per il sistema dato $P(s)$, la f.d.T. a ciclo chiuso con un controllore PI è:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{K_p s + K_i}{s^3 + 10s^2 + (20 + K_p)s + K_i}$$

Riduciamo il K_p a 30 e consideriamo $K_i = 70$. In Scilab:

--> $K_p=30$;

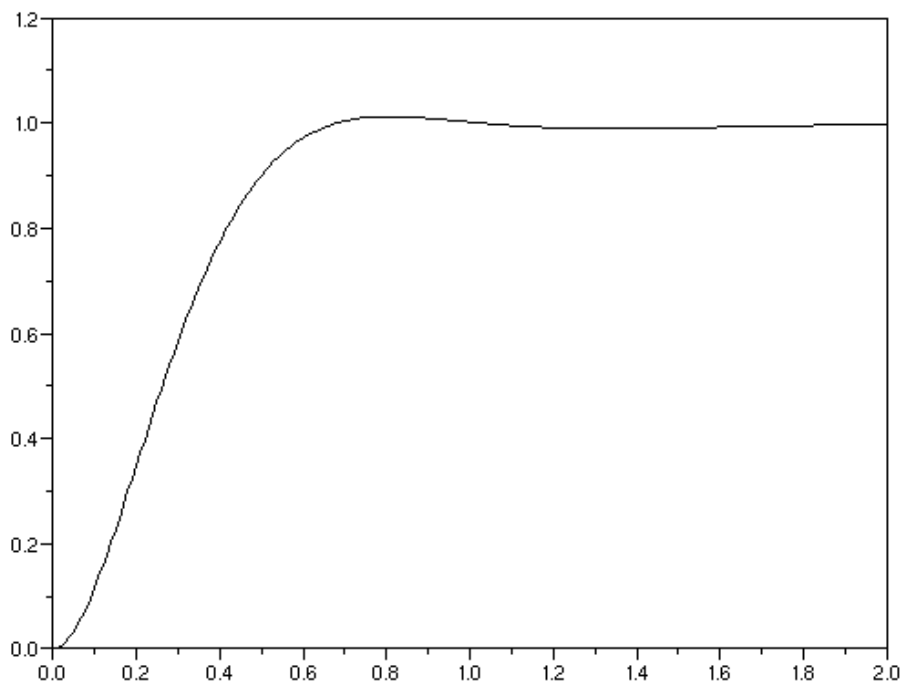
--> $K_i=70$;

--> $P5=(K_p+K_i/s)$;

```

-->P6=P5*P;
-->P6R=P6/.R
P6R =
    70 + 30s
-----
    70 + 50s + 10s2 + s3
-->sl6=tf2ss(P6R);
-->plot2d([t],[(csim('step',t,sl6))])

```



Come si nota dalla risposta al gradino, siamo riusciti ad annullare l'errore a regime (la curva tende a 1). Abbiamo ridotto il guadagno proporzionale perché il controllore Integrabile riduce il tempo di salita ed incrementa le sovraelongazioni (ed anche il controllore proporzionale ha questi effetti).

Controllore proporzionale, integrale e derivativo

Analizziamo, ora, un controllore PID. La f.d.T. a ciclo chiuso diventa:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s^3 + (10 + K_D)s^2 + (20 + K_P)s + K_I}$$

Dopo vari tentativi, cambiando opportunamente i valori dei tre controllori, si è trovata la risposta migliore con $K_P = 350$, $K_D = 50$ e $K_I = 300$:

-->Kp=350;

-->Kd=50;

-->Ki=300;

-->P7=(Kp+Kd*s+Ki/s);

-->P8=P7*P;

-->P8R=P8/.R

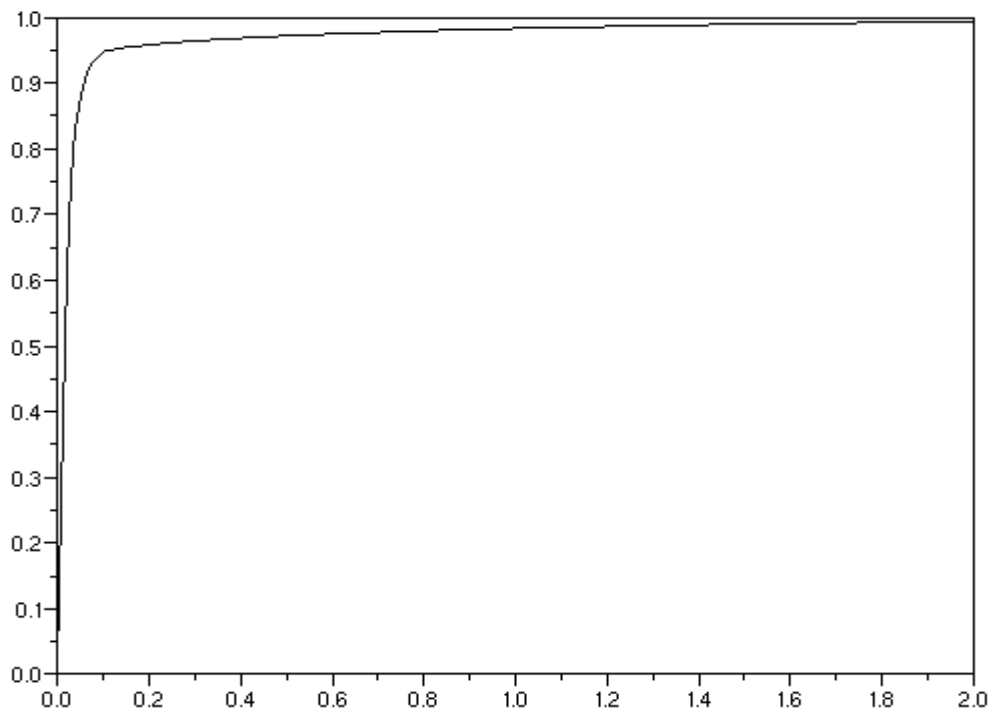
P8R =

$$300 + 350s + 50s^2$$

$$\frac{300 + 350s + 50s^2}{300 + 370s + 60s^2 + s^3}$$

-->sl8=tf2ss(P8R);

-->plot2d([t],[(csim('step',t,sl8))])



Passi da compiere per costruire un controllore PID

Nella costruzione di un controllore per un sistema dato, i passi da compiere sono:

1. Ottenere la risposta del sistema ad anello aperto.
2. Inserire il sistema ad anello chiuso e vederne la risposta.
3. Aggiungere un controllore proporzionale con il compito di migliorare il tempo di salita.
4. Aggiungere un controllore derivativo per diminuire le oscillazioni (e le sovraelongazioni).
5. Aggiungere un controllore integrale per eliminare l'errore a regime.
6. Ricavare per tentativi o usando il metodo Ziegler-Nichols i guadagni migliori dei tre controllori.

Attenzione, non è necessario implementare e quindi rendere più complesso il sistema di controllo tutti e tre i controllori, se non strettamente necessario. Per esempio, nel nostro caso potevamo fermarci con il controllore PI, senza aggiungere l'azione derivativa.

Metodo di Ziegler-Nichols

SI pongono inizialmente a 0 i guadagni dei tre controllori: $K_P = K_I = K_D = 0$.

- Si aumenta K_P fino a portare il sistema al limite della stabilità.
- Si prende il valore K_{pmax} nel punto in cui la risposta del sistema è una oscillazione di ampiezza costante.
- Si misurano i valori della pulsazione ω_C e quindi del periodo T_C del tratto ad oscillazione costante.
- Si inseriscono i valori trovati nella tabella seguente così da ottenere i valori da dare ai guadagni a seconda del tipo di regolatore che vogliamo usare.

<i>Controllore</i>	K_P	K_I	K_D
P	$0.5 * K_{pmax}$	0	0
PD	$0.5 * K_{pmax}$	0	$(0.5 * K_{pmax}) * (0.2 * T_C)$
PI	$0.45 * K_{pmax}$	$\frac{0.45 * K_{pmax}}{0.83 * T_C}$	0
PID	$0.6 * K_{pmax}$	$\frac{0.6 * K_{pmax}}{0.5 * T_C}$	$(0.6 * K_{pmax}) * (0.125 * T_C)$