DIAGRAMMA DI NYQUIST

Il diagramma di Nyquist ci permette di studiare la stabilità e le caratteristiche di un sistema ad anello chiuso osservando il suo comportamento ad anello aperto. Il criterio di Nyquist viene usato per la stabilità di un sistema di un qualunque sistema, quando, invece, il criterio di Bode vale solo se il sistema ad anello aperto è stabile (P = 0).

Il diagramma di Nyquist è essenzialmente un grafico di $G(j\omega)$ dove G(s) è la f.d.T. a ciclo aperto e ω è un vettore di frequenze che circondano l'intero semipiano destro. In realtà, il diagramma delle frequenze positive viene chiamato polare, mentre il diagramma completo è quello di Nyquist.

Il criterio di Cauchy

Il criterio di Cauchy stabilisce che se prendiamo una curva C chiusa nel piano di Gauss, e se si mappa attraverso una funzione complessa G(s), il numero di volte che la curva di G(s) gira attorno all'origine è uguale alla differenza tra il numero di zeri e di poli di G(s) inclusi nella zona del piano complesso racchiusa dalla curva G(s). I giri intorno all'origine sono considerati positivi se seguono la stessa direzione della curva chiusa C, o negativi se le due direzioni sono opposte.

Quando studiamo il sistema retroazionato non siamo interessati a G(s) ma alla funzione di trasferimento ad anello chiuso:

$$\frac{G(s)}{1+G(s)}$$

Se 1 + G(s) circonda l'origine, allora G(s) circonda il punto -1 + j0. A noi interessa la stabilità ad anello chiuso, quindi vogliamo sapere se ci sono poli ad anello chiuso (zeri di 1 + G(s)) nel semipiano destro. Quindi, è estremamente importante analizzare il diagramma di Nyquist intorno al punto -1 sull'asse reale.

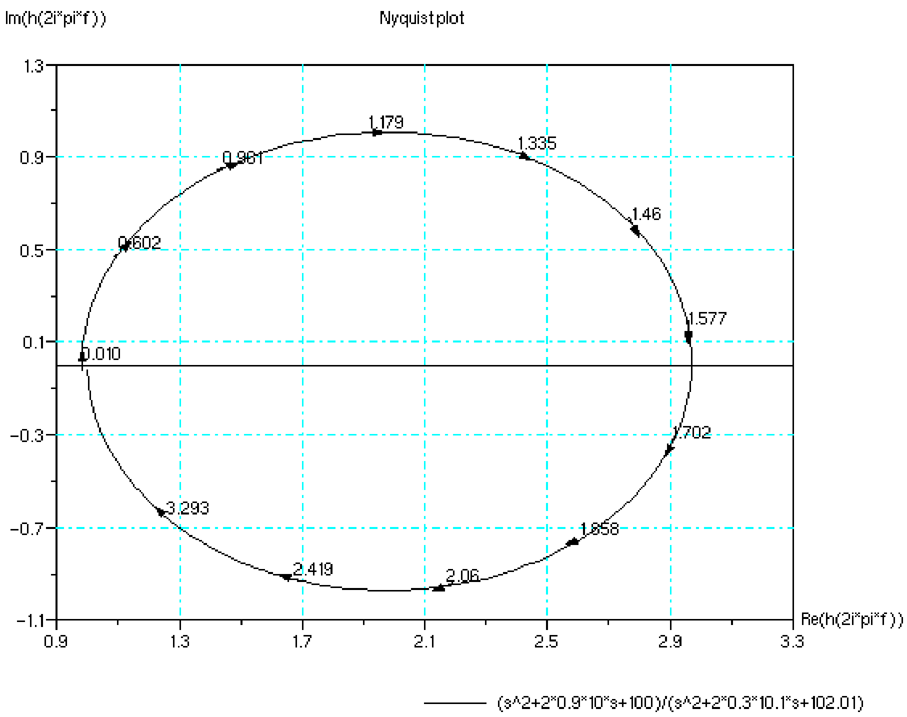
Esempio di sistema con due zeri e due poli.

```
-->s=poly(0,'s');

-->h=syslin('c',(s^2+2*0.9*10*s+100)/(s^2+2*0.3*10.1*s+102.01));

-->comm='(s^2+2*0.9*10*s+100)/(s^2+2*0.3*10.1*s+102.01)';

-->nyquist(h,0.01,100,comm);//frequenze tra 0.01 e 100
```



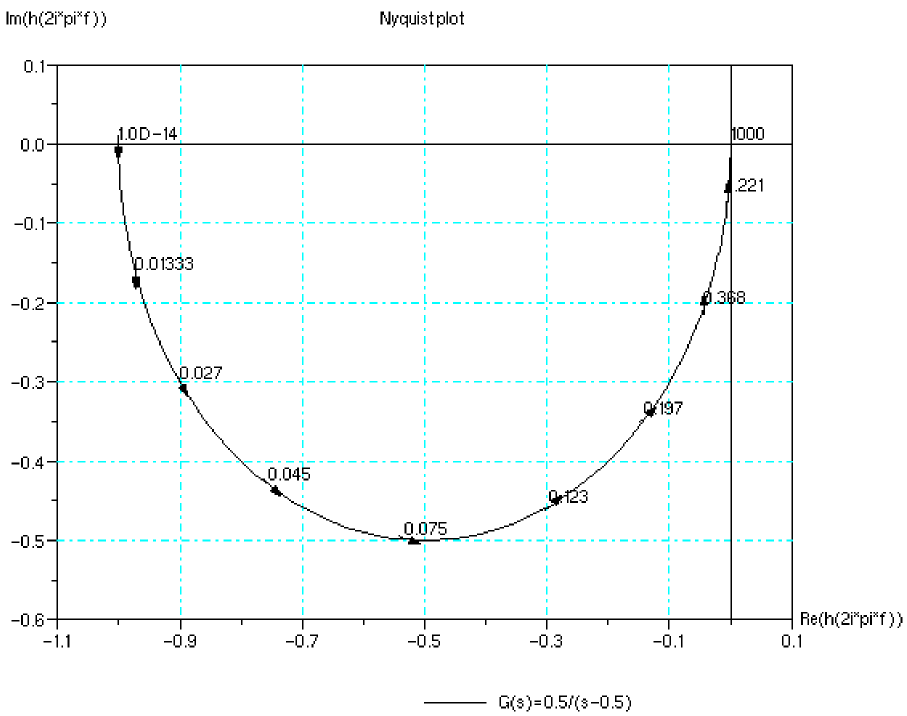
In realtà questo è il diagramma polare; per Nyquist bisogna ruotare la curva intorno all'asse reale.

Esempio:

-->h=syslin('c',0.5/(s-0.5));

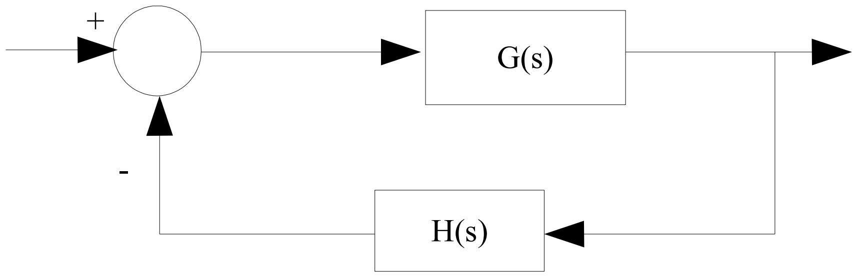
-->comm='G(s) = 0.5/(s-0.5)';

-->nyquist(h,0,1000,comm);



Stabilità a ciclo chiuso

Consideriamo un sistema con retroazione negativa H(s):



Dal criterio di Cauchy è noto che il numero N di volte che il grafico di G(s)*H(s) gira intorno al punto -1 è uguale alla differenza tra il numero Z di zeri ed il numero P di poli di 1 + G(s)*H(s) (N = Z – P). Analizzando la f.d.T. ad anello aperto e chiuso come numeratore e denominatore, si nota che:

- gli zeri di 1 + G(s)*H(s) sono i poli della funzione a ciclo chiuso;
- i poli di 1 + G(s)*H(s) sono i poli della funzione di trasferimento ad anello aperto.

Il criterio di Nyquist stabilisce che:

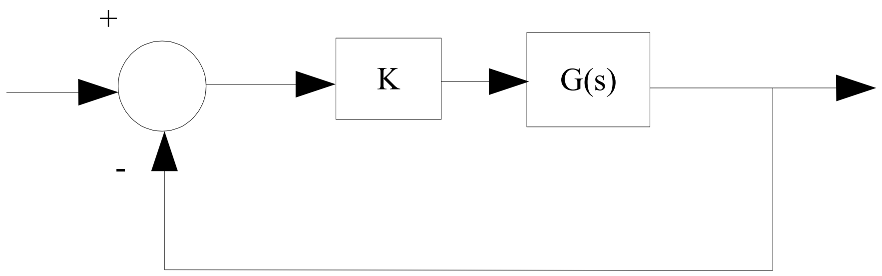
- P = numero di poli a parte reale positiva a ciclo aperto di G(s)*H(s);
- N = numero di volte che il diagramma completo di Nyquist aggira il punto -1;
- se il verso di aggiramento è in senso orario l'incremento è positivo;
- in senso antiorario l'aggiramento è negativo;
- Z = numero di poli presenti nel semipiano destro del sistemo ad anello chiuso.

La relazione importante che lega per convenzione queste quantità è: **Z = P + N.**

Un altro modo di vedere il problema è di immaginarsi sul punto -1 e di seguire il grafico dall'inizio alla fine. Dobbiamo contare quante volte ci giriamo di 360° su noi stessi e tener conto del verso (se orario N è positivo, altrimenti N è negativo).

Conoscendo P (poli instabili) e N, possiamo determinare la stabilità di un sistema ad anelo chiuso. Se Z = P + N è positivo e diverso da zero, allora il sistema ad anello chiuso è instabile.

E' possibile trovare l'intervallo di guadagno per cui risulta stabile il sistema a ciclo chiuso con retroazione unitaria.



con $G(s)=\dfrac{s^2+10*s+24}{s^2-8*s+15}$

Questo sistema ha un guadagno K che può essere variato per modificare la risposta del sistema. Dobbiamo cercare i valori di K che rendono stabile il sistema a ciclo chiuso.

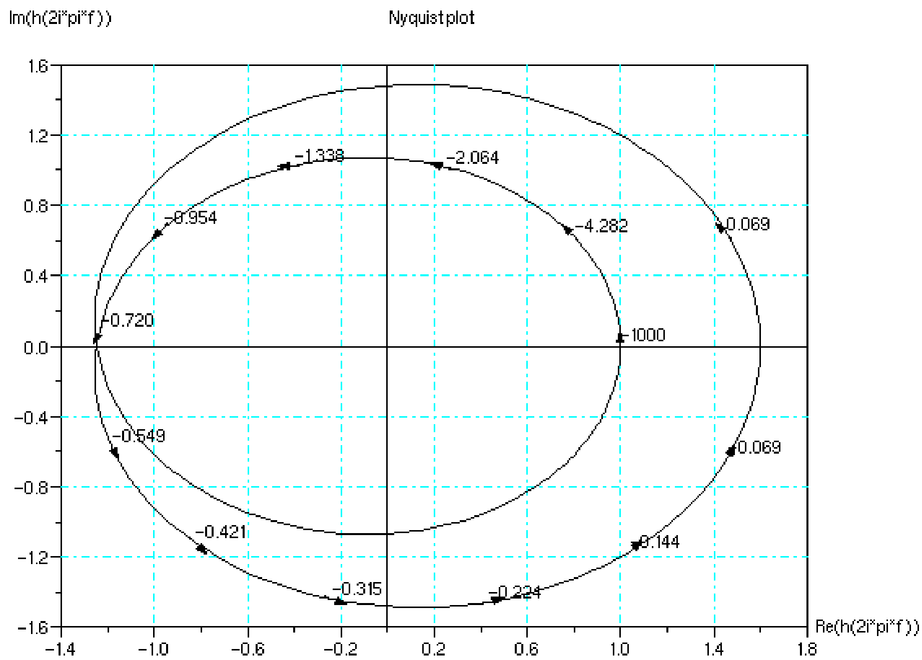
La prima cosa da fare è cercare il numero di poli reali positivi nella funzione di trasferimento a ciclo aperto.:

```
-->p=s^2-8*s+15;
-->roots(p)
 ans  =
!   3. !
!   5. !
```

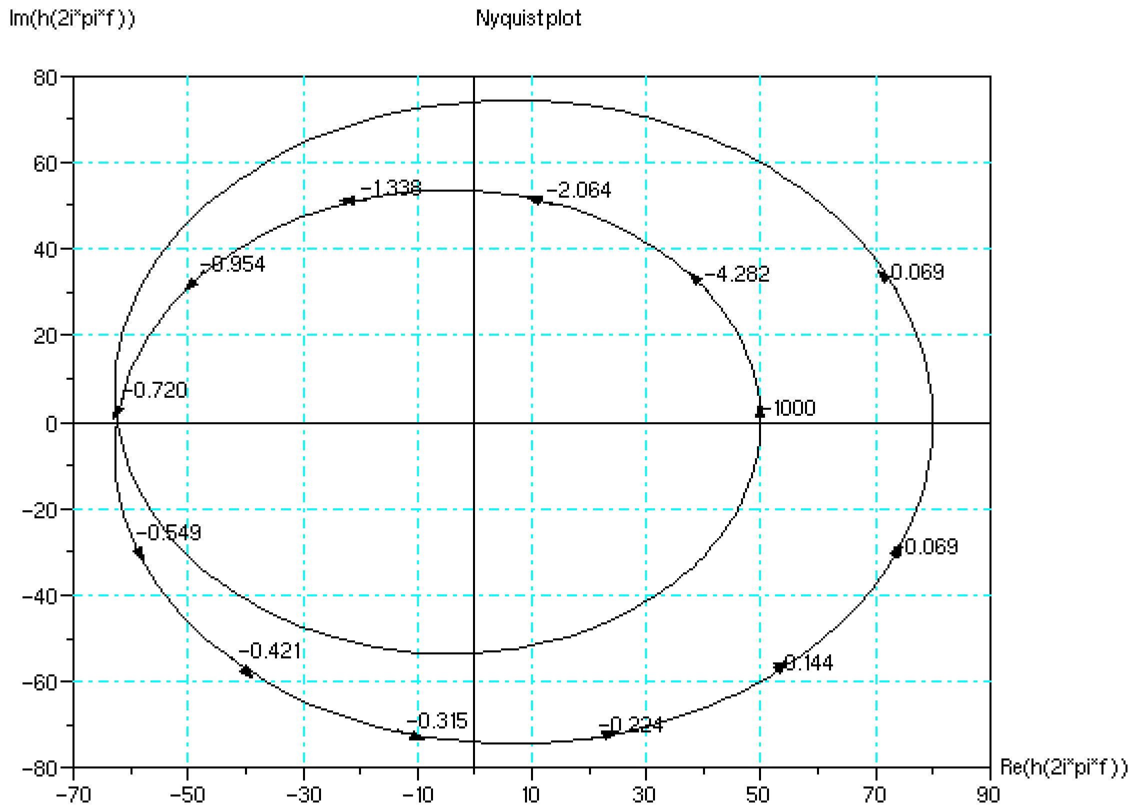
I poli sono entrambi positivi, quindi abbiamo bisogno di 2 giri in senso antiorario (N = - 2) del diagramma di Nyquist intorno al punto critico – 1 + j0 per avere un sistema stabile. Se N<2 o il verso non è antiorario, il sistema ad anello chiuso è instabile.

Supponiamo che K = 1:

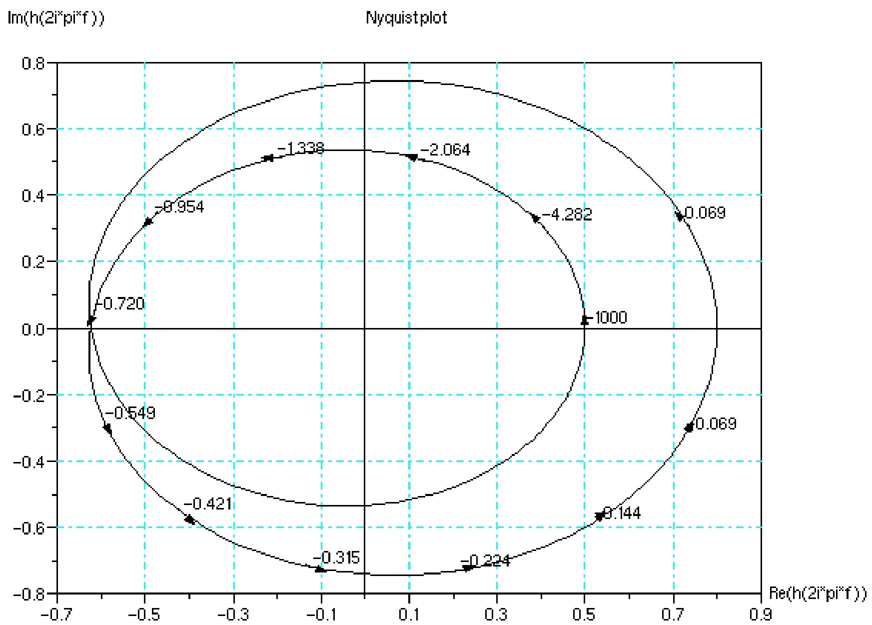
```
-->h=syslin('c',(K*(s^2+10*s+24))/(s^2-8*s+15));
-->nyquist(h);
```



Ci sono 2 giri in senso antiorario intorno al punto – 1, quindi il sistema con guadagno unitario è stabile. Aumentando, adesso, il guadagno a 50 si ottiene:



Il diagramma si è allargato, perciò il sistema è stabile qualsiasi sia l'incremento del guadagno maggiore di 1. Se invece il guadagno diminuisce il sistema diventa instabile. Per esempio, K = 0.5:



Il sistema è instabile. Dopo vari tentativi si trova che il sistema diventa instabile per $K < 0.8$.

Margine di guadagno

Si è già definito il margine di guadagno come la variazione a ciclo aperto del guadagno in dB necessaria affinché, con una fase di – 180°, il sistema diventa instabile. Brevemente, usando lo zoom è possibile determinare il margine di guadagno come l'inverso del valore assoluto del punto di intersezione della curva sul semiasse reale negativo nel caso che il punto -1 sia esterno alla curva.

Margine di fase

Anche il margine di fase è stato definito come la variazione di fase a ciclo aperto richiesta per rendere il sistema instabile quando il modulo in dB vale 0. In breve, per avere il margine di fase, bisogna effettuare la differenza tra 180° e il valore assoluto dell'angolo della curva quando interseca il cerchio unitario corrispondente a 0 dB.