Metodo di risoluzione di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di ordine n

di

Prof. Capobianco Ing. Nicolò

Introduzione

Nel mondo reale siamo portati spesso a dover risolvere delle equazioni differenziali, cioè equazioni in cui oltre alla variabile dipendente e a quella indipendente sono presenti anche le derivate della variabile dipendente. L'ordine della equazione differenziale è dato dall'ordine della più alta derivata della funzione incognita.

Lineare indica che ogni termine della equazione presenta solamente una derivata.

A coefficienti costanti indica che i coefficienti non dipendono dalla variabile dipendente.

Le equazioni differenziali in generale possono essere omogenee o non omogenee. Omogenea quando la funzione f(t) è identicamente nulla nell'intervallo desiderato, altrimenti si dice che è non omogenea.

In definitiva, una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti di ordine n è del tipo:

(1) $$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1} y^{(1)}+a_n y=\phi(t)$$

dove, per semplicità, si è omessa la dipendenza della funzione y e delle sue derivata dalla variabile t.

Equazioni differenziali lineari a coefficienti lineari di ordine n omogenee

In questo caso si determina l'equazione caratteristica sostituendo alle funzioni la variabile λ :

(2) $$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0.$$

Ricordiamo che siamo davanti ad una equazione algebrica di grado n che ammette solo n radici che possono essere tutte distinte o multiple.

Nel caso in cui siano tutte distinte $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, l'integrale (o soluzione) generale dell'equazione di partenza sarà:

$y(t)=C_1\cdot e^{\lambda_1 t}+C_2\cdot e^{\lambda_2 t}+\cdots+C_n\cdot e^{\lambda_n t}$, dove le C sono costanti arbitrarie, che possono essere univocamente determinate solo conoscendo le condizioni iniziali, che devono essere tante quanto è l'ordine dell'equazione differenziale. Per esempio una equazione di ordine due avrà due C.I.: $y(t_0)\, e\, y'(t_0)$.

Nel caso in cui ci sono n radici multiple, si ottiene: $y(t)=C_1\cdot e^{\lambda_1 t}+C_2\cdot t\cdot e^{\lambda_1 t}+\cdots+C_n\cdot t^{n-1}\cdot e^{\lambda_1 t}$; oppure una loro combinazione lineare, ricordando che la somma di tutte le radici deve essere n.

Ricordiamo ancora che se l'equazione caratteristica ammette una radice complessa ($\alpha+i\cdot\beta$) ammette anche la sua coniugata $\alpha-i\cdot\beta$. In questo caso, agli integrali $e^{(\alpha+i\cdot\beta)t}\, e\, e^{(\alpha-i\cdot\beta)t}$ si possono sostituire gli integrali $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ e $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$.

Esempio 1: Risolvere l'equazione $y''-7y'+12y=0$.

La sua equazione caratteristica è: $\lambda^2-7\lambda+12=0$, che ha due radici reali e distinte 3 e 4.

Pertanto, l'integrale generale vale: $y(t)=C_1 e^{3\cdot t}+C_2 e^{4\cdot t}$.

Esempio 2: Risolvere l'equazione $y''-2y'+y=0$.

La sua equazione caratteristica è: $\lambda^2-2\lambda+1=0$, che ha due radici reali e coincidenti di valore 1.

Pertanto, l'integrale generale vale: $y(t)=C_1 e^{t}+C_2\cdot t e^{t}$.

Esempio 3: Risolvere l'equazione $y''-4y'+5y=0$.

La sua equazione caratteristica è: $\lambda^2-4\lambda+5=0$, che ha due radici complesse e coniugate: $2\pm 2\mathrm{i}$.

Pertanto, l'integrale generale vale: $y(t)=C_1 e^{2\cdot t}\cos(3\mathrm{t})+C_2 e^{2\cdot t}\sin(2\mathrm{t})$.

Equazioni differenziali lineari a coefficienti lineari di ordine n non omogenee

Per il calcolo dell'integrale generale è sufficiente renderle omogenee annullando la $\phi(t)$.

Invece, per il calcolo dell'integrale particolare consideriamo solo i tre casi di $\phi(t)$ maggiormente utilizzati: polinomio di grado r, polinomio per un esponenziale, funzione sinusoidale.

Nel primo caso è possibile determinare un integrale particolare che sia anch'esso un polinomio.

Se in (1) è $a_n\neq 0$ si può soddisfare l'equazione con un polinomio di grado r:

(3) $$\phi(t)=b_0 t^r+b_1 t^{r-1}+\cdots+b_{r-1}t+b_r,$$

dove i coefficienti si devono determinare in modo che la (1).

Se, invece, $a_n=0$ e $a_{n-1}\neq 0$ si deve prendere un polinomio di grado r+1, e così via.

Esempio 4: Risolvere l'equazione $y''-7y'+12y=t^2$.

La sua equazione caratteristica è sempre: $\lambda^2-7\lambda+12=0$, che ha due radici reali e distinte 3 e 4.

Pertanto, l'integrale generale della omogenea vale: $y(t)=C_1 e^{3\cdot t}+C_2 e^{4\cdot t}$.

Osserviamo che $a_n\neq 0$ pertanto, $\phi(t)=at^2+bt+c$, dove a, b e c sono le costanti da determinare. Dobbiamo calcolare le derivate prima e seconda della $\phi(t)$ e sostituire nella (1) per calcolare i coefficienti con il metodo dell'identità dei polinomi.

$$\phi'(t)=2\mathrm{at}+b\,,\ \phi''(t)=2\mathrm{a}.$$

Sostituiamo ed otteniamo: $2\mathrm{a}-7\cdot(2\mathrm{at}+b)+12\cdot(at^2+bt+c)=t^2$

Dal sistema di tre equazioni in tre incognite (a, b, c) risultante si ottiene usando anche Scilab:

$$a=\frac{1}{12}$$
$$b=\frac{7}{72}\ .$$
$$c=\frac{37}{864}$$

Ne segue che l'integrale generale dell'equazione di esempio vale:

$$y(t)=C_1\mathrm{e}^{3\cdot t}+C_2\mathrm{e}^{4\cdot t}+\frac{1}{12}t^2+\frac{7}{72}t+\frac{37}{864}.$$

Nel secondo caso, supponiamo che $\phi(t)=P(t)\cdot\mathrm{e}^{\alpha t}$ e con lo stesso procedimento di prima, si determina un integrale particolare: $\phi(t)=(b_0 t^r+b_1 t^{r-1}+\cdots+b_{r-1}t+b_r)\cdot\mathrm{e}^{\alpha t}$, se α non è radice dell'equazione caratteristica derivata dall'equazione differenziale omogenea associata. Altrimenti si avrà: $\phi(t)=t^m\cdot(b_0 t^r+b_1 t^{r-1}+\cdots+b_{r-1}t+b_r)\cdot\mathrm{e}^{\alpha t}$, se α è radice di ordine m di molteplicità dell'equazione caratteristica.

Esempio 5: Risolvere l'equazione $y''-7y'+12y=t\,\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}$.

La sua equazione caratteristica è sempre: $\lambda^2-7\lambda+12=0$, che ha due radici reali e distinte 3 e 4.

Pertanto, l'integrale generale della omogenea vale: $y(t)=C_1\mathrm{e}^{3\cdot t}+C_2\mathrm{e}^{4\cdot t}$.

Ma α è uguale ad una delle radici dell'equazione caratteristica, quindi $\phi(t)=t\cdot(at+b)\cdot\mathrm{e}^{3t}$.

Calcoliamo le derivate:

$$\phi'(t)=[3\mathrm{at}^2+(2\mathrm{a}+3\mathrm{b})t+b]\cdot e^{3t};\qquad \phi''(t)=[9\mathrm{at}^2+(12\mathrm{a}+9\mathrm{b})t+(2\mathrm{a}+6\mathrm{b})]\cdot e^{3t}.$$

Sostituendo, dopo facili calcoli, si ottiene:

$$a=\frac{-1}{2}\ .$$
$$b=-1$$

Ne segue che l'integrale generale dell'equazione di esempio vale:

$$y(t)=C_1\mathrm{e}^{3\cdot t}+C_2\mathrm{e}^{4\cdot t}-t\left(\frac{t}{2}+1\right)\cdot\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}.$$

Infine, vediamo il caso di funzioni sinusoidali, del tipo: $\phi(t)=P(t)\cdot\mathrm{e}^{\alpha t}\cdot\sin(\beta t)$ o $\phi(t)=P(t)\cdot\mathrm{e}^{\alpha t}\cdot\cos(\beta t)$.

Se il numero $\alpha+i\beta$ non è radice dell'equazione caratteristica corrispondente all'omogenea, allora si cerca un integrale particolare di forma: $\phi(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}\cdot[P_1(t)\cdot\sin(\beta t)+P_2(t)\cdot\cos(\beta t)]$.

Se invece il numero $\alpha+i\beta$ è radice di molteplicità r dell'equazione caratteristica, si ha:

$\phi(t)=t^r\cdot e^{\alpha t}\cdot[P_1(t)\cdot\sin(\beta t)+P_2(t)\cdot\cos(\beta t)]$.

Esempio 6: Risolvere l'equazione $y''+y'=5\sin(3t)-2\cos(3t)$.

La sua equazione caratteristica è sempre: $\lambda^2+\lambda=0$, che ha due radici reali e distinte 0 e -1.

Pertanto, l'integrale generale della omogenea vale: $y(t)=C_1+C_2e^{-t}$.

Siamo nel caso in cui un integrale particolare è della forma: $\phi(t)=[a\sin(3t)+b\cos(3t)]$.

Derivando, si ottiene: $\phi'(t)=[3a\cos(3t)-3b\sin(3t)]; \phi''(t)=[-9a\cos(3t)-9b\sin(3t)]$.

Sostituendo e applicando l'identità dei polinomi, si ottiene che $a=\frac{-17}{30}; b=\frac{1}{30}$.

Pertanto, l'integrale generale vale $y(t)=C_1+C_2e^{-t}-\frac{17}{30}\cdot\sin(3t)+\frac{1}{30}\cdot\cos(3t)$.

Determinazione delle costanti arbitrarie

Come detto, è necessaria la conoscenza delle C.I. ad un istante che possiamo considerare l'istante zero: y(0) = ..., y'(0) = ... e così via. Si sostituiscono i valori e si ottiene un sistema nelle costanti C.

Esempio 7: Risolvere l'equazione $y''-7y'+12y=0$, con y(0) = 0 e y'(0) = 4.

$y(0)=C_1e^0+C_2e^0=C_1+C_2=0; y'(0)=3C_1+4C_2=4$.

Dalla risoluzione del sistema con Scilab si ha che $C_1=-4\, e\, C_2=4$.

Pertanto $y(t)=-4e^{3\cdot t}+4e^{4\cdot t}$.