

Circuiti elettrici

di

Prof. Capobianco Ing. Nicolò

Analisi dei circuiti lineari e stazionari a costanti concentrati

Dispositivi costituiti da elementi lineari e concentrate in piccole zone volumetriche dello spazio, quasi puntiformi, e connessi tra loro da cavi percorsi da corrente ma inessenziali ai fini del comportamento fisico. Tale corrente non genera alcun effetto, come quello Joule, magnetico ed elettromagnetico. Lineari perché il comportamento dei sistemi si riduce ad una serie di equazioni differenziali che compongono un sistema lineare e facilmente risolvibile. I risultati che si ottengono, entro certi limiti, si avvicinano alla realtà. Questi elementi sono stazionari perché non variano nel tempo.

Tutto ciò è, ovviamente, una astrazione; basta pensare al passaggio di corrente in un cavo che noi trascuriamo, anzi i cavi sono visti solo come collegamenti geometrici.

La rete elettrica, formata dai vari dispositivi collegati tra loro dai cavi, viene chiamata circuito elettrico quando si possono individuare dei circuiti chiusi (loop) chiamate maglie.

Tali dispositivi, chiamati dipoli, sono: resistori, condensatori, induttori, elementi che provocano la mutua induzione, generatori di corrente e di tensione, diodi, triodi, transistor.

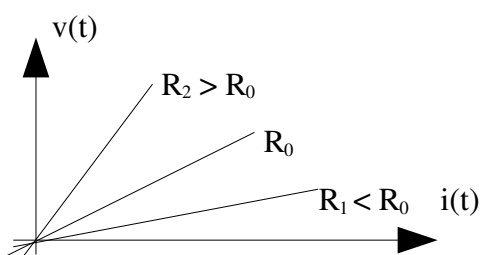
Resistore

Questo dispositivo, alimentato da una tensione applicata agli estremi, viene percorso da una corrente elettrica secondo la ben nota legge di Ohm: $v(t) = R \cdot i(t)$ dove tensione e corrente sono scritte in minuscolo perché dipendenti dal tempo, mentre il resistore è scritto in maiuscolo perché supposto costante. Dalla legge notiamo che la corrente e la tensione hanno lo stesso andamento temporale a meno della costante R (ohm).

R è reciproco, cioè il suo comportamento è identico rispetto al verso di percorrenza della corrente. Ovvero, l'operazione è invertibile, cioè la causa e l'effetto tra v e i è a piacere. Quindi, è possibile

anche scrivere: $i(t) = G \cdot v(t)$, con $G = \frac{1}{R}$ conduttanza (Siemens).

Il comportamento del resistore ideale è una retta che passa per l'origine degli assi che hanno per ordinata v (Volt) e per ascissa i (Ampere).



La pendenza di questa retta non esprime la tangente trigonometrica in quanto le due scale possono essere diverse. Ricordiamo che è possibile parlare di tangente trigonometrica solo nel caso di scale monometriche.

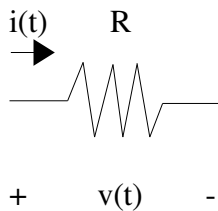
L'inclinazione della retta è legata al valore del resistore.

Chiaramente nel resistore si dissipa una energia infinitesima: $dW = v \cdot i \cdot dt$ e complessiva:

$$W = \int_0^T v \cdot i \, dt \quad \text{ovvero una potenza istantanea } P = v \cdot i \quad \text{o media } P = \frac{1}{T} \int_0^T v \cdot i \, dt.$$

Ciò che è particolarmente importante è che la tensione e la corrente possono avere un andamento temporale qualsiasi; ma in ogni istante il loro rapporto deve essere sempre R.

Tutto ciò viene messo sotto un unico profilo grafico dato da una convenzione simbolica:



perché R è intrinsecamente positiva.

La corrente è quella convenzionale fatta con cariche positive mentre nei Condensatori si muovono le cariche negative.

Nella realtà non ci sono resistori lineari e ideali, perché dipendono dalla temperatura, e quindi, con il passaggio di corrente che provoca un riscaldamento, il valore di R varia. Il resistore ideale non esiste; ma entro certi limiti di corrente e di tensione e con precise condizioni, si può avere un buon resistore.

Ricordiamo che è la potenza vista prima che si dissipa in calore (effetto Joule).

Condensatore

Dispositivi costituiti da due armature di qualsiasi forma, una caricata da cariche positive e l'altra da una uguale quantità di cariche negative, affacciate l'una rispetto all'altra e separate da un dielettrico.

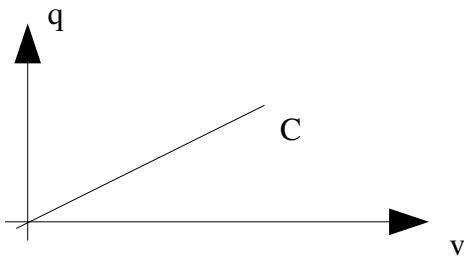
Fra le due armature si genera un campo elettrico.

Si consideri un esempio di tipo idraulico: un secchio cilindrico di altezza infinita, dove viene gettata dell'acqua. Nel nostro caso, le cariche elettriche corrispondono alla quantità variabile di liquido e la differenza di potenziale corrisponde al livello raggiunto dall'acqua.

La legge lineare che lega la quantità di carica (q), misurata in Coulomb, con la tensione sul condensatore (v) è: $q = C \cdot v$. C indica la capacità del condensatore; è misurata in Farad (F), ed in particolare nei suoi sottomultipli.

Essa può essere considerata l'equivalente della legge di Ohm per i condensatori.

Anche adesso l'operazione è invertibile fra causa ed effetto, quindi si può anche scrivere: $v = \frac{1}{C} q$.



È possibile scrivere in maniera diversa. Infatti, $i = \frac{dq}{dt}$; e differenziando la prima relazione si

ottiene: $dq = C dv \rightarrow \frac{dq}{dt} = i = \frac{C \cdot dv}{dt}$; così si ottiene la seguente relazione non lineare

$$(1) \quad i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

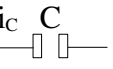
Differenziando, invece, la seconda relazione si ottiene: $dv = \frac{1}{C} dq = \frac{1}{C} i \cdot dt$; e integrando avremo in forma simbolica:

$$(2) \quad v_c = \frac{1}{C} \int i_c dt$$

È in forma simbolica perché in realtà si ha $dq = i_c dt$ e poi integrando si ottiene:

$$\int_{q(0)}^{q(\theta)} dq = \int_0^\theta i_c dt. \text{ È un integrale in funzione del tempo e si compendia in } q = \int i_c dt.$$

La (1) e la (2) descrivono il comportamento del condensatore. È interessante notare che la corrente è positiva se è positiva la derivata della tensione nel tempo, ossia se la tensione sta crescendo.

Per convenzione si ha: $\rightarrow i_c$  C
 $+ \quad v_c \quad -$

A questo punto sorge un importante problema; si dice che la corrente passa in C, ma in realtà ciò non è vero. In effetti, all'aumentare della tensione le cariche negative si ammassano su una armatura, e si allontanano dall'altra caricandola positivamente. Quindi, le cariche si muovono nei circuiti grazie alle f.e.m. presenti ma non attraversano il condensatore.

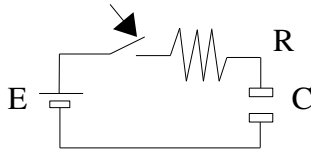
Quando c'è concordanza ohmica tra corrente e tensione il condensatore si carica e viceversa, ed il

verso della corrente è, per esempio, positivo se la pendenza della tensione $\frac{dv}{dt} > 0$. Altrimenti il condensatore si scarica.

Se un condensatore inizialmente scarico si carica alla tensione v_0 , l'energia $W = \frac{1}{2} C v_0^2$ sarà localizzata nel campo elettrico del condensatore e può essere restituita integralmente quando il condensatore si scarica. Il condensatore, al contrario del resistore che è dissipativo, è un elemento conservativo. Ciò solo nel caso inesistente di condensatori ideali. Nella realtà infatti i condensatori si scaricano anche se lentamente su se stessi; è come se ci fosse un resistore di valore molto elevato in parallelo al condensatore.

A questo punto, è interessante chiedersi se può esistere un aumento istantaneo della tensione ai capi di un condensatore. Ciò corrisponderebbe a depositare una quantità finita di cariche in un tempo infinitesimo, ossia avere una corrente infinita. E ciò nella realtà fisica non può esistere. Si deduce, da questo ragionamento fisico, che C è inerziale alla tensione ma non alla corrente. Cioè, la corrente può variare istantaneamente ma ciò non può farlo la tensione.

Consideriamo un circuito RC, con un interruttore che si chiude ad un certo istante:

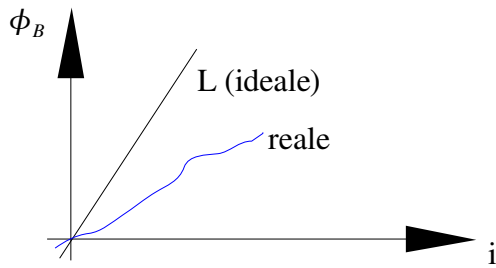


Il condensatore, inizialmente scarico, si carica e si ha un passaggio di corrente attraverso il resistore. La carica termina quando sul condensatore si ha una tensione pari a quella del generatore, e la corrente non circola più. E questo perché il generatore è diventato idealmente un circuito aperto. Il condensatore si carica con andamento esponenziale e termina la sua carica in un tempo infinito. Nella pratica, si suppone che la carica sia terminata dopo circa $4 \div 5$ costanti di tempo pari a RC .

Induttore

È un dispositivo in cui si genera un flusso di induzione magnetica che risulta proporzionale alla intensità di corrente. Schematicamente un induttore viene rappresentato da un filo avvolto in più spire, chiamato solenoide.

Il passaggio di corrente provoca un campo magnetico che a sua volta determina un flusso magnetico di induzione. Se questo flusso è proporzionale alla corrente, si dice che il comportamento dell'induttore è lineare. La legge è quella di Faraday – Newmann – Lenz – Fedeli: $\phi_B = L \cdot i$, che è strettamente analoga a $q = C \cdot v$. In questo caso i fenomeni non sono di natura elettrostatici ma elettromagnetici. L'unità di misura dell'induttore è Henry (H).



Si tratta di una retta passante per l'origine, la cui pendenza dipende dal fattore L . E' molto difficile avere un induttore con caratteristiche lineari, perché il filo deve essere avvolto per formare il solenoide; e maggiore è il numero di spire, più lungo è il filo e non è possibile fare a meno di considerare la resistenza che esso offre al passaggio di corrente. In più, le spire possono essere viste come armature di un condensatore. Il primo problema si può eliminare grazie all'utilizzo di particolari conduttori, chiamati superconduttori, la cui conducibilità infinita si raggiunge prima dello 0 K. Mentre, la capacità tra le spire non si elimina ed inoltre, il materiale di cui è composto il filo è di tipo ferromagnetico, per aumentare gli effetti magnetici, ma non ha un andamento lineare. Comunque, li consideriamo sempre dispositivi ideali, e quando è possibile sostituiamo un induttore con un condensatore perché ha un andamento più lineare.

L'analogia tra le leggi $\phi_B = L \cdot i$ e $q = C \cdot v$ è evidente e ci dice che la quantità di carica q per il condensatore eguaglia il flusso ϕ_B per l'induttore. Però, mentre è possibile avere un corpo con solo cariche negative o positive, non è possibile per un corpo magnetico avere un solo polo magnetico isolato.

Si può dire che una variazione nel tempo del flusso provoca una f.e.m. autoindotta e_i che si oppone con i suoi effetti alle cause che la hanno generata. Il segno meno è stato messo da Lenz:

$$(3) \quad e_i = - \frac{d\phi_B}{dt} = -L \cdot \frac{di}{dt}.$$

Qualunque sia la causa di questa variazione di flusso, l'unica cosa che può variare è la corrente i , quindi non si ha tensione indotta se la corrente si mantiene costante.

Contemporaneamente ci sarà una tensione uguale e contraria per controbilanciare e_i :

$$(4) \quad v_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}.$$

Inoltre, si può dire che $\int v_L dt = \int L di_L$ e integrando, dopo aver supposto che la corrente è nulla all'istante iniziale ($i_0 = 0$), si ottiene:

$$(5) \quad i_L = \frac{1}{L} \int v_L dt.$$

Queste due scritture sono formalmente identiche alla (1) e (2). Si dicono che sono scritture duali; cioè, espressioni che hanno la stessa forma matematica ma con lo scambio tra i e v , e C e L .

Anche per l'induttore è possibile considerare una energia magnetica: $W = \frac{1}{2} L i^2$, questa energia immagazzinata nel campo magnetico ed interamente restituibile tramite l'induttore. Come C, anche L è un elemento conservativo.

Ricordiamoci di non prendere mai come incognita sia v che i , in quanto noto uno l'altro si determina di conseguenza.

Dal confronto tra le relazioni si nota che come C si comporta nei confronti della corrente, L si comporta nei confronti della tensione; quindi, come C è inerziale nei confronti della tensione e non della corrente, L è inerziale nei confronti della corrente e non della tensione. Ovvero, non è possibile imprimere un salto istantaneo di corrente perché si dovrebbe avere una tensione ∞ .

Possiamo fare un esempio meccanico di un volano nei confronti della velocità di rotazione. Il volano è il nostro induttore inerziale nei confronti della velocità di rotazione che è la nostra corrente.

Generatori

Sono dei dispositivi capaci di azionare dei dispositivi elettrici, o erogando differenza di potenziale, generatori di tensione, o erogando corrente nel circuito, generatori di corrente.

I generatori possono essere ideali e reali.

Il generatore ideale di tensione è capace di erogare una forza elettromotrice, con andamento temporale qualsiasi, indipendente dal carico al limite del cortocircuito cioè per $R \rightarrow 0$, mentre la corrente dipende dal carico. Non esistono generatori del genere ma alcuni, come la batterie delle automobili, si avvicinano.

Il generatore ideale di corrente, di cui si fa un grandissimo uso specialmente in elettronica, è capace di erogare corrente con qualsiasi cosa vi sia attaccata, fino al limite del circuito aperto, $R \rightarrow \infty$.

Mentre dipende dal carico la tensione che è nulla quando c'è in cortocircuito ed aumenta man mano che aumenta la resistenza.

Per passare da un generatore ideale ad uno reale bisogna mettere all'interno del generatore in serie una resistenza interna per quello di tensione e in parallelo una conduttanza interna per quello di corrente.